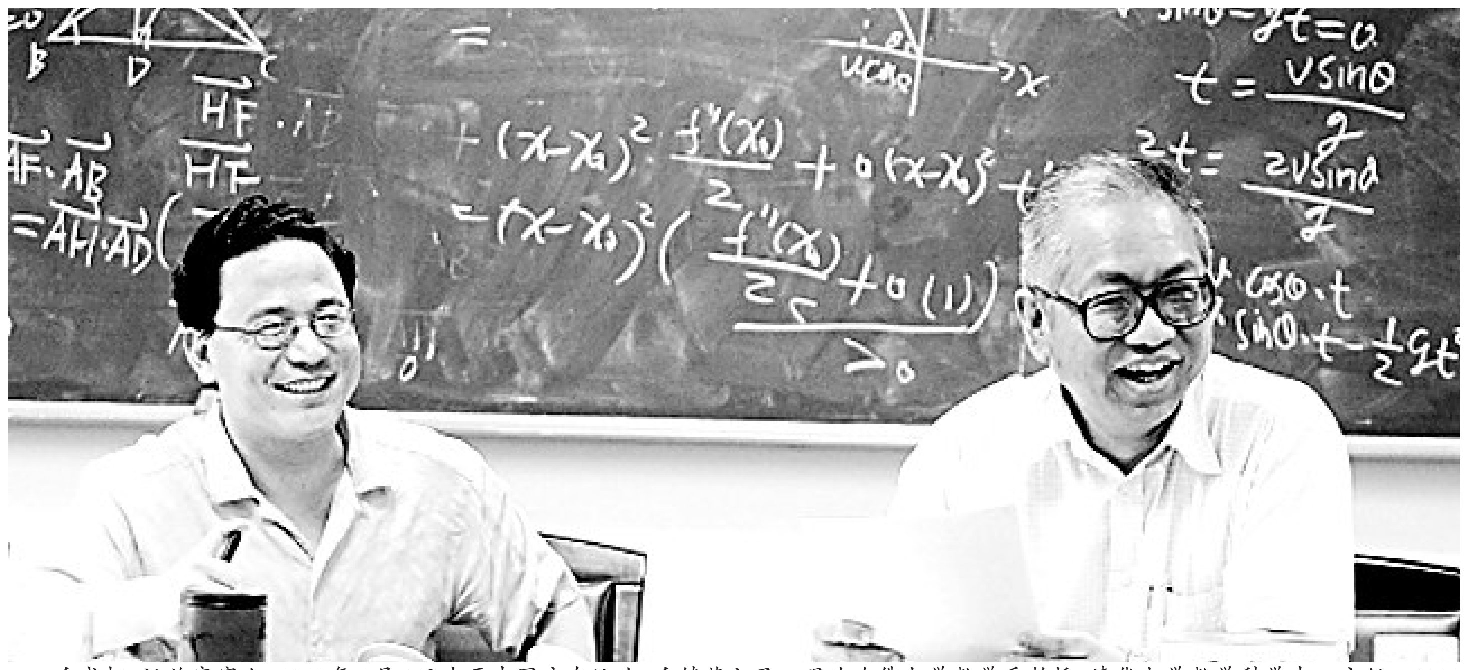
丘成桐与卡拉比猜想60年

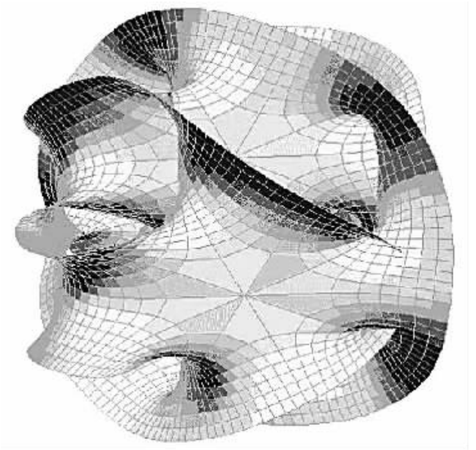
——谨以此文献给丘成桐教授荣获菲尔兹奖30周年

演讲人:刘克峰　**时间**:2月8日　**地点**:美国加州大学洛杉矶分校



丘成桐,汉族客家人,1949年4月4日生于中国广东汕头,丘镇英之子。现为哈佛大学数学系教授,清华大学数学科学中心主任。1983年获得数学界的“诺贝尔奖”——菲尔兹奖,是迄今为止仅有的两个获得该奖的华人数学家之一。图为丘成桐(右)和刘克峰先生。

陈省身先生(1911-2004年)



卡拉比空间

丘成桐与卡拉比先生

20世纪50年代是几何与拓扑学最辉煌的时代。一批年轻的数学家证明了一系列伟大的数学定理,开天辟地,创造了一个崭新的时代。他们与他们的定理一起,熠熠生辉,照亮了整个数学的历史。

> 卡拉比(Calabi)猜想在数学界的期盼中,等待着它真正的王者到来,这一等就是21年。

1941年的霍奇(Hodge)理论刚刚由魏尔(Weyl)和小平邦彦(Kodaira)整理完成。1945年陈省身引进的陈示性类由希策布鲁赫(Hirzebruch)发扬光大,证明了拓扑中的符号差定理与代数几何中的Hirzebruch-Riemann-Roch定理。工程师出身的博特(Bott)证明了他不朽的同伦群周期性定理。这些结果很快激发出了Atiyah-Singer指标定理。塞尔(Serre)用勒雷(Leray)的谱序列计算了代数拓扑中球面的同伦群,用层论写下了代数几何名篇GAGA,将复分析系统地引入代数几何。Kodaira证明了他著名的嵌入定理,发展了复流形的形变理论。稍后,米尔诺(Milnor)发现了七维怪球,纳什(Nash)证明了黎曼(Riemann)流形的嵌入定理。这些伟大的数学家与他们的定理,如繁星闪耀在天空,令人目不暇给。

1954年的国际数学家大会,菲尔兹(Fields)奖的获奖者是小平邦彦(Kodaira)和塞尔(Serre),他们的主要获奖工作都是将复分析、微分几何与代数几何完美地结合在一起。正如魏尔(Weyl)在他的颁奖词中所说:“他们的成就远远超越了他年轻时的梦想,他们的成就代表着数学一个新时代的到来。”

也是在这届数学家大会上,31岁的意大利裔数学家卡拉比,在会议的邀请报告中用一页纸写下了他著名的猜想:令M为紧致的卡勒(Kahler)流形,那么对其第一陈类中的任何一个(1,1)形式R,都存在唯一的一个卡勒度量,其Ricci形式恰好是R。卡拉比还粗略地描述了一个他的猜想的证明方案,并证明了,如果解存在,那必是唯一的。

但3年后,在1957年的一篇关于Calabi-Yau流形的几何结构的文章中,他意识到这个证明根本行不通。这里需要求解一个极为艰深而复杂的偏微分方程,叫作复的Monge-Ampere方程。他去请教20世纪最伟大的数学家之一的魏尔(Andre Weil)教授。魏尔说:“当时还没有足够的数学理论来攻克它。”

众所周知,庞加莱(Poincare)著名的单值化定理告诉我们,一维复流形的万有覆盖只有简单的三种,球面、复平面和单位圆盘。如何将单值化定理推广到高维流形,这个问题几乎主导了现代几何与拓扑的发展。而即使从复一维到复二维流形,问题的复杂性已经远超想象,被数学家称作是从天堂到了地狱。或者说是上帝创造了黎曼面,简单美丽而又丰富多彩,是魔鬼制造了复曲面,内容复杂,令人眼花缭乱,头晕目眩。卡拉比猜想可以认为是单值化定理在高维不可思议的大胆推广,竟然给出了高维复流形中难得一见的一般规律。特别的是它在复卡勒流形的第一陈类大于零、等于零和小于零三个情形,指出了Kahler-Einstein度量的存在性,即此度量的第一陈形式等于其卡勒形式。这恰好对应于黎曼面三种单值化的推广。

要知道,当时人们知道的爱因斯坦流形的例子都是局部齐性的,甚至都不知道复投影空间中的超曲面,如K3曲面上,是否有爱因斯坦度量。在这样一种情况下,卡拉比竟然做出如此大胆的猜测,可见其胆识过人,也难怪此后多数几何学家都怀疑此猜想的正确性,许多人都在努力寻找反例,而不是证明它。正如庞加莱的单值化定理,霍奇定理需要经过数年,乃至数十年努力才得到完美的证明一样,卡拉比猜想也在数学界的期盼中,等待着它真正的王者到来,这一等就是21年。

> 塞尔说过:“一个真正好的数学猜想,它的解决应该随之而来一系列的推论和绵延不断的影响。”

还是在1957年,5岁的丘成桐正在世界的另一端过着清贫的生活,那时的香港几乎没有人知道什么是微分几何。14岁时父亲的去世,更令他饱尝人间冷暖,也造就了他不屈不挠的性格。11年后他进入香港中文大学,1969年,大学三年级的他便负笈求学来到伯克利(Berkeley)。那一年,著名的几何学家伍鸿熙教授在给另一位著名几何学家格林(Greene)的信中,预言这个19岁的年轻人将会改变微分几何的面貌。很难知道伍鸿熙教授如何看出了一个19岁年轻人不同寻常的王者之气。

读研究生的第一年,丘成桐初试身手,便解决了微分几何中一个有关负曲率流形基本群的结构问题,事后他才知道这就是微分几何中著名的沃尔夫猜想。这一点颇像米尔诺(Milnor)把扭结理论里的猜想当成家庭作业完成一样。当遇到卡拉比猜想后,他像是见到了美丽的天使,一见钟情。此后童话般的故事人人皆知,其中的痛苦与快乐也只有丘成桐自己才能体会。后来他告诉所有人,他成功的诀窍是用苦功而非天才,他曾尝试过近五千个实验函数,来发展流形上梯度估计的技巧。所以我们知道,一只苹果掉到头上,令牛顿豁然开朗地发明了微积分,那只是个传说。为了解决卡拉比猜想,他需要系统地创建和发展流形上的非线性分析,特别是Monge-Ampere方程的理论、方法与技巧。他先与郑绍远合作,用实的Monge-Ampere方程解决了著名的闵可夫斯基(Minkowski)猜想和闵可夫斯基时空中的伯恩斯坦(Bernstein)问题,此后再将他自己发展的梯度估计技术发挥到极致,终于在1975年完全解决了卡拉比猜想。此时此刻,除了丘成桐,最高兴的应该是卡拉比,从1954年到1975年,整整21年的梦想终于成为了现实!那一年的圣诞节,他、丘成桐和尼伦伯格(Nirenberg)一起在纽约的Courant研究所度过,整天就是讨论丘成桐的证明。卡拉比猜想终于成为了Calabi-Yau定理!

卡拉比后来回忆,那是他一生中唯一的一次在圣诞节开会,而那个猜想的证明就是最好的圣诞礼物。1991年当他获得了美国数学会终身成就奖时,他动情地说,我特别要感谢丘成桐,因为他,今天我才能站在这个领奖台上。

塞尔说过:“一个真正好的数学猜想,它的解决应该随之而来一系列的推论和绵延不断的影响。”卡拉比猜想就是如此,这里我仅举几个例子。

首先,对于第一陈类小于和等于零的紧卡勒流形,卡拉比猜想告诉我们,Kahler-Einstein度量总是存在。其中对小于零的情形,其简单的推论就解决了长期悬而未决的Severi猜想,复二维投影空间的复结构是唯一的,甚至任意维数复投影空间的卡勒复结构也是唯一的。

另一个匪夷所思的推论是,在任意维数的这类复流形上,存在一个奇妙的陈示性数不等式,而此前代数几何学家却只能得到复二维的情形。第一陈类等于零的二维复流形是有名的K3曲面,托尔罗夫(Todorov)用Calabi-Yau定理证明了其周期映射是满射,萧荫堂利用Calabi-Yau度量证明了所有的K3曲面都是卡勒曲面。而高维数的第一陈类为零的复流形的基本结构定理也随之而来。这些都是复几何与代数几何中著名的猜想,在卡拉比猜想证明之前,人们毫无办法,望而却步。

最令人惊奇的是上世纪80年代初,超弦学家们认识到第一陈类等于零的三维复流形,恰好是他们的大统一理论所需要的十维时空中的一个六维空间,这神秘的六维空间,在我们看不到的尺度里主宰着我们大千世界的千变万化。这个发现引发了物理学的一场革命。物理学家们兴奋地把这类流形称为Calabi-Yau空间,Yau便是丘成桐的英文姓氏。有兴趣的朋友如果在Google中输入Calabi-Yau,就会发现近40万个条目。以至于不少物理学家都以为Calabi是丘成桐的名字。正如威滕(Witten)所言,在这场物理学的革命中,每一个有重要贡献的人都会名扬千古。Calabi-Yau也在数学中引发了一系列重大的进展,如超弦学家Candelas等人通过研究不同的Calabi-Yau流形给出的相同的超对称共形场论所发现的镜对称猜想。这个猜想由丘成桐、连文豪与我以及Givental独立证明,它解决了代数几何中遗留了上百年的舒伯特(Schubert)计数问题。基于Calabi-Yau流形的基本结构,著名超弦学家威滕、瓦法(Vafa)等人发展的Chern-Simons与拓扑弦对偶理论给出了黎曼面模空间中许多奇妙的公式,如Marino-Vafa公式给出了无穷多个模空间积分的组合闭公式,此猜想由刘秋菊、周坚与我一起证明。可以说Calabi-Yau流形早已成为弦论学家们必不可少的魔匣,利用它,他们不断地变换出令人炫目的猜想,这已经成为数学与理论物理发展的潮流,至今方兴未艾。

> 卡拉比猜想的证明,也标志着微分几何一个新时代的到来。

霍奇理论、小平邦彦嵌入定理、Calabi-Yau定理是复几何发展史上的三个最伟大的里程碑,也是整个数学中屈指可数的最美妙的定理。它们有许多异曲同工的地方。它们都是用微分几何证明的,都是连接几何与其他领域必不可少的桥梁,如代数几何等。它们所需要的条件都简单而容易验证,都包含代数几何与微分几何中最有意义的一大类流形。它们的应用都给出源源不断的重要推论,都成为复几何教科书中必不可少的篇章。这是数学中所有伟大定理的共同特征。

卡拉比猜想的证明也标志着微分几何一个新时代的到来。一个新的学科随之产生,称为几何分析。它的定义就是用非线性微分方程的方法来系统地解决几何与拓扑中的难题,反过来也用几何的直观与想法来理解偏微分方程的结构。

丘成桐在1978年的国际数学家大会的大会报告中系统而清晰地描绘了几何分析与高维单值化理论的发展前景。由此方法,一系列著名的问题得到解决,特别是唐纳森(Donaldson)为代表的规范场理论与低维拓扑的结合,汉密尔顿(Hamilton)的Ricci流与庞加莱猜想的历史性进展,将几何分析的发展带到了一个高峰。

另一方面,早在1983年,丘成桐的学生曹怀东、坂东(Bando)便在他的指导下,首先用Ricci流的方法开始研究卡勒流形上标准度量的存在性,使Kahler-Ricci流成为复流形研究中重要的工具之一。

另一个与卡拉比猜想密切相关的问题是代数几何中全纯向量丛的稳定性与其上的Hermitian-Einstein度量的对应问题,这个问题约化成一个与规范场理论相关的极为困难的非线性方程解的存在性问题。1986年丘成桐与乌伦贝克(Uhlenbeck)合作,在卡勒流形上完全解决了这个问题。稍后,唐纳森也在投影流形上用不同的方法将这个问题解决。1988年,辛普森(Simpson)将这些结果推广并与霍奇变分理论相结合,发展成为代数几何中一个极为有效的工具。

对于复流形的切丛,Kahler-Einstein度量可以认为是没有挠率的Hermitian-Einstein度量,所以Kahler-Eienstein度量意味着流形的切丛在代数几何意义下是稳定的,但要更细致更深刻。多年来,丘成桐一直考虑什么样的代数稳定性对应着Kahler-Einstein度量的存在。从我1988年来到哈佛成为丘成桐的学生,他的讨论班里最多的话题就是代数几何中各种稳定性的概念与相关的度量和分析问题。丘成桐的几个学生,如田刚、李骏、梁乃聪和罗华章等人的博士论文都是讨论这方面的题目。他的一些想法记录在他1990年所发表的100个几何问题集里,这个问题集是为陈省身79岁生日而整理的。第65个问题就猜测Kahler-Einstein度量的存在性应该等价于代数几何中几何不变量意义下的稳定性。在第一陈类大于零的复流形上,这个猜想首次给出了Kahler-Einstein度量存在的充分必要条件,建立了标准度量与代数几何的密切关系。他当时的不少学生,包括田刚在内,都感觉到丘成桐猜想指出了新的研究方向,非常漂亮,也很有意义,开始努力研究丘成桐猜想。在此之前丘成桐也考虑了如何用伯格曼核的想法来逼近Kahler-Einstein度量,如何将卡拉比猜想推广到开流形与有奇点的流形上,并在几篇著名的综述文章中予以详细的阐述。这些都成为今后复几何发展的重要纲领,并引领了日后唐纳森、田刚等人关于Kahler-Einstein度量方面的工作。基于他的一部分想法,丘成桐与郑绍远、莫毅明和田刚整理并发表了一系列的文章,其中一部分组成了田刚的博士论文。众所周知,田刚的博士论文以及日后的主要工作大都从丘成桐的这些想法和猜想引发而来。

> “落花人独立,微雨燕双飞”,这是丘成桐描述自己证明了卡拉比猜想时的心情所用的诗句。

与第一陈类小于和等于零的情况相反,直到丘成桐提出他的猜想前,第一陈类大于零的情况一直显得颇为迷离。首先这类流形有不存在Kahler-Einstein度量的例子。在20世纪60年代,松岛(Matsushima)证明了Kahler-Einstein流形的自同构群必须可约。80年代初,福复(Futaki)引进了此类流形上存在Khler-Einstein度量的障碍函数,被称之为福复不变量。事实上,很多学者,如卡拉比、福复等都误以为没有全纯向量场应该是Kahler-Einstein度量存在的唯一必要条件,并没有意识到流形本身稳定的重要性。在较特殊的复二维情形,有一些存在性结果,但萧荫堂一直认为,这些结果并不完备,至今也还没有完整的结果。此后近30年,田刚一直沿着丘成桐猜想所指出的研究方向不懈努力,试图理解正曲率条件下,稳定性与Kahler-Einstein度量的存在性如何相关,他用福复不变量定义了一个解析稳定性的概念,称为K-稳定性,并取得了一些进展。然而这个问题的真正突破来自于唐纳森,他在2001年证明了如果卡勒流形上的卡勒类中存在一个常数量曲率的度量,并且其自同构群是离散的,那么这个流形就是在代数几何意义下是稳定的。唐纳森所用的关健工具恰好是丘成桐考虑过的伯格曼核的逼近方法,他敏锐地观察到伯格曼核渐进展开的第二项正是数量曲率,如果它为常数,则相应的偏微分方程便可解。此后唐纳森引进了适合研究丘成桐猜想的代数几何意义下的K-稳定性概念,并在2010年公布了证明K-稳定性与Kahler-Einstein度量存在等价性的丘成桐猜想的纲领,最近陈秀雄-唐纳森-孙崧在网上发表了三篇文章实现了这些想法,而田刚在唐纳森纲领的基础上也宣称完成了这个猜想的证明。由于这些文章都相当复杂,如唐纳森等人写了三篇长文,田刚在贴出自己的文章后还在不断地做出修改,所以这些证明的正确性还有待专家们详细验证。

第一陈类大于零的复流形也叫作法诺流形,这类流形比第一陈类小于零的流形相对来得少,其内容也远不如后者丰富,例如复一维情形只有一个球面,而复二维的流形从拓扑来看也只是复投影空间吹大几个点。更有意思的是代数几何中研究这类流形的工具也远比微分几何的方法强大,特别是1979年森重文(Mori)在法诺流形上用有限域的技巧发现的有理曲线存在性,这是迄今为止微分几何方法一直无法超越的天才发明。以此为工具,代数几何学家对法诺流形几何的了解走在了微分几何研究的前面。

这种情况与第一陈类小于和等于零的情形形成了鲜明的对比,这两类流形包含比法诺流形丰富得多的例子,而由于丘成桐证明的卡拉比猜想,在这些流形的研究中,微分几何的方法和工具更强大也更有效。这里我们还要注意到,正如唐纳森等人在他们的文章中所阐述的,K-稳定性并不是一个容易验证的条件,其实用性也与丘成桐所证明的卡拉比猜想相差甚远。目前他们所证明的丘成桐猜想唯一有意思的推论还是丘成桐所指出的,K-稳定形可以推出切丛的稳定性。所以即使K-稳定性等价于Kahler-Einstein度量的存在性的猜想得到证明,其重要性也需要在日后的应用中才能得到检验。而丘成桐本人则在勾画了他的猜想的证明纲领后,便将题目交给了他的学生和朋友,一方面他认为他的猜想虽然重要,但与他证明的卡拉比猜想相比还是有很大的距离,另一方面他认为弦理论引发的数学问题要比他自己的猜想更具挑战性,也有更大的潜力。事实上,他和他的学生与博士后在Calabi-Yau流形上的工作已经在近代数学中开创了一个新的重要研究方向。至于丘成桐猜想证明的正确性和其在几何学中的前景,只有他这个开创者和专家才有资格来评判了。

当然,卡拉比猜想只是丘成桐众多数学成就的一部分。1978年受邀在国际数学家大会作大会报告时,他29岁。1983年获得数学界最高奖,菲尔兹奖时,他34岁。特别要说明的是那个时候他持香港护照,还是中国公民。他也一直以此为豪。1983年12月22日,当时的中共中央总书记胡耀邦在中南海亲切会见了为祖国争得荣誉的丘成桐教授。此后他几乎囊括了这个世界上一个数学家所能得到最高荣誉,包括沃尔夫奖、克拉福德奖和美国国家科学奖章。然而卡拉比猜想的证明毫无疑问是他数学事业中最为绚丽的篇章,它承载了无数数学家60年的光荣与梦想,造就了几何分析40载的传奇与辉煌。

“落花人独立,微雨燕双飞”,这是丘成桐描述自己证明了卡拉比猜想时的心情所用的诗句。从那一刻起,丘成桐一跃而成为一个伟大的数学领袖,领导了几何学近四十年的辉煌,他代表了数学与超弦理论的一个时代。正如《纽约时报》所言:他是当之无愧的数学皇帝。

刘克峰　1965年12月生,现任浙江大学数学中心执行主任兼数学系主任、光彪讲座教授、美国加州大学洛杉矶分校数学系教授。专业方向:微分几何、拓扑、数学物理。现任国际顶尖数学杂志《几何与分析通讯》主编。他荣获了全球华人数学最高奖“晨兴数学金奖”和2004年教育部十大科技进展奖。他还获得了国际上著名的谷庚海默奖、全球华人数学家大会银奖、斯隆(Sloan)奖和特曼(Terman)奖等。